

Princípios Teóricos para Imagens Médicas: Transformada de Radon

MALHEIRO, Magno Gilmar Borges Malheiro.

TRAVESSINI DE CEZARO, Fabiana Travessini De Cezaro.

E-mail: m_malheiro@yahoo.com.br

Evento: Congresso de Iniciação Científica.

Área do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra - Matemática

Palavras-chave: Tomografia Computadorizada, Transformada de Radon, Imagens Médicas.

1 INTRODUÇÃO

O problema essencial em todo o tipo de tomografia é determinar da estrutura interna de um meio a partir de medidas no exterior do objeto. No caso particular da Tomografia Computadorizada, a modelagem de tal problema pode ser pensada da seguinte forma: Suponha que o raio-X esteja direcionado através $\Omega \subset R^N$ ao longo de uma reta ξ . Sejam p_0 e p as intensidades do raio antes e depois de penetrarem em Ω . Enquanto o raio-X percorre uma distância Δx , ao longo de ξ , este sofre uma perda de intensidade Δp devido ao coeficiente de absorção $f(x)$. Fisicamente, esse processo pode ser descrito como

$$\frac{\Delta p}{p} = -f(x)\Delta x \quad (1)$$

Supondo Δp e Δx infinitesimais e integrando de ambos os lados na equação acima, sobre a reta, obtemos

$$p = p_0 \exp\left(-\int_{\xi} f(x)dx\right) := \mathcal{R}(f(x)) \quad (2)$$

conhecida como a Transformada de Radon [1,2,3,4,5].

A obtenção de imagens tomográficas através de tomografia computadorizada está associada à determinação de $f(x)$ a partir de medidas de p e conhecidos os dados de entrada p_0 . A solução matemática deste problema é devido a J. Radon em 1917 [2,4,5].

Neste trabalho estudaremos as propriedades da Transformada de Radon, de forma a provar existência, unicidade e estabilidade de identificação do coeficiente de absorção $f(x)$ na equação integral (2). Tais resultados teóricos são de muita importância na prática, para garantir que os diagnósticos sejam confiáveis.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A transformada de Radon (2) no caso geral é uma equação integral sobre hiperplanos. Assim, iniciamos nossa pesquisa pelo estudo da integração em hiperplanos. Os resultados de integração estudados serviram de base para obtermos resultados de existência, unicidade para a identificação de $f(x)$ em (2) através a demonstração da existência de uma Transformada de Radon Inversa. Os resultados obtidos passam, obrigatoriamente pela teoria de integração em espaços de funções

[2,4,5].

3 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

Iniciamos os estudos a partir da derivação do modelo (Transformada de Radon (2)) e da necessidade de identificar $f(x)$ a partir de medidas de p na equação (2). Haja visto que, no caso geral, a equação integral (2) deve ser considerada sobre hiperplanos, estudamos a teoria de integração em hiperplanos. De posse dos resultados de integração, passamos a obter os resultados necessários para provar a existência de uma inversa para a Transformada de Radon. Em outras palavras, provamos que (2) é injetiva e sobrejetiva em espaços de funções adequados. Este processo passa pelo entendimento da equação integral (2) e da transformada de Fourier de (2), das propriedades de tal composição. É importante salientar que, no caso de $f(x)$ ter propriedades de simetria radial, a equação (2) transforma-se numa integral de Abel, a qual são conhecidas várias propriedades [2,3,4,5].

4 RESULTADOS e DISCUSSÃO

Neste trabalho, provamos resultados de identificabilidade única do coeficiente de absorção $f(x)$ no modelo de Tomografia Computadorizada, a partir da medição da intensidade de radiação que atravessa o meio. De posse da distribuição da absorção no meio, é possível determinar possíveis anomalias (tumores) sem a utilização de procedimentos invasivos. Deste modo, os resultados teóricos de unicidade de identificação são de extrema importância para estabelecer a confiabilidade prática dos diagnósticos médicos, bem como das demais aplicações da metodologia de aquisição de imagem por tomografias deste tipo, haja visto que, resultados negativos neste quesito significaria a possibilidade de obtenção de um modelo de distribuição de absorção com diagnósticos falso positivos ou falso negativos e assim.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O diferencial dos resultados estudados neste trabalho reside na demonstração de identificabilidade única do coeficiente de absorção no modelo de tomografia computadorizada. Como comentado acima, tal resultado teórico é de extrema importância do ponto de vista prático. Para a obtenção dos resultados, foi necessário o estudo de um aporte teórico da teoria de integração em hiperplanos em espaços de funções adequados [2,4,5].

Haja visto que, na prática, os dados para o problema são coletados a partir de medições, e assim, sujeitas a erros, faz-se necessário estabelecer estimativas de estabilidade para o problema de identificação aqui estudado, bem como a implementação numérica da transformada de Radon. Estes são fruto de nossos objetivos futuros relacionados a este projeto [1,5].

REFERÊNCIAS

- [1] BUZUG, T. M., **Computer Tomography**, Springer-Verlog, Berlin, 2008.
- [2] BARRETO, A. SÁ, **Introdução às Transformadas de Radon**, Notas de minicurso no Symposium on Spectral and Scattering Theory, Recife, 2003.
- [3] DE CEZARO A. e LEITÃO A., **Introdução aos problemas inversos lineares**, IV Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, SBM, Maringá, 2008.
- [4] DE CEZARO, A. e TRAVESSINI DE CEZARO, F., **Problemas Inversos e a Matemática da Tomografia Computadorizada**, V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFPB, João Pessoa, 2010.
- [5] NATTERER, F, **The mathematics of computerized tomography**, B. G. Teubner, Stuttgart, 1986.