Solução analítica de uma equação de reação-difusão em um domínio crescente

SCARDUELI, Mariana Dagostin
ZIEBELL, Juliana Sartori
marianadscardueli@hotmail.com

Evento: 14° Mostra de Produção Universitária
Área do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra – Matemática

Palavras-chave: equações diferenciais, reação-difusão, domínios uniformemente crescentes.

1 INTRODUÇÃO

Os modelos matemáticos que se ajustam aos processos biológicos têm se desenvolvido amplamente na ciência. Estes estudos envolvem componentes obtidas de forma casualizada ou determinística, onde podem apresentar características de grupos populacionais dentro de um espaço de tempo ou referir-se a processos dinâmicos [BROWN e ROTHERY, 1993]. Dentre os modelos encontrados, muitos são focados nos processos de transporte e reação de moléculas de domínios em crescimento, em particular, nas células precursoras neurais que integram o sistema digestivo que constituem o Sistema Nervoso Entérico (SNE).

As células precursoras neurais entram pela cavidade bucal do intestino em desenvolvimento, onde migram e proliferam, e se deslocam para a extremidade anal do intestino em desenvolvimento. Esta colonização torna-se complicada pelo fato de que os tecidos do intestino são alongados simultaneamente conforme as células precursoras se movem e, estas células, devem colonizar completamente o tecido em desenvolvimento.

Esse trabalho tem como objetivos encontrar a solução analítica do modelo matemático do SNE e avaliar essa solução para alguns casos particulares. Com isso iremos buscar uma condição de sucesso ou insucesso para a colonização.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O desenvolvimento do SNE consiste no transporte e reação (proliferação) de células em um domínio em crescimento. A formulação que utilizamos nesse trabalho é baseada em [SIMPSON, 2015]. Consideramos um processo linear de reação-difusão em um domínio crescente a fim de obtermos uma equação diferencial parcial que descreva o problema.

3 MATERIAIS E MÉTODOS (ou PROCEDIMENTO METODOLÓGICO)

Empregamos as técnicas adotadas em [SIMPSON, 2015]. Neste desenvolvimento é considerada a conservação da massa de uma função densidade, $C(x, t)$, assumindo que a função da densidade populacional evolui de acordo com o mecanismo linear de reação-difusão e pode ser descrito pela seguinte Equação Diferencial Parcial

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial (Cv)}{\partial x} + kC \qquad (1)$$

com 0<*x*<L(t), onde *D*>0 é a difusividade, *k* é a taxa de produção e *v* é a velocidade associada com o crescimento do domínio. Considera-se ainda que a equação 1 possui as seguintes condições iniciais

$$C(x,0) = \begin{cases} C_0 & 0 \le x < \beta \quad , \\ 0 & \beta \le x \le L(0) \end{cases} \qquad (2)$$

onde é suposto que não há condições de fluxo difusivo nas fronteiras, $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$ quando *x* = 0 e *x* = L(*t*).

Inicialmente, transformamos a variável espacial em um domínio fixo definindo ξ=x/L(t), e fizemos uma mudança de escala no tempo [CRANK, 1975]. Com essas mudanças de variáveis na equação (1) obtemos uma nova equação cuja solução analítica pode ser obtida com o método da separação de variáveis [BOYCE, 1997].

4 RESULTADOS e DISCUSSÃO

A partir da solução analítica da equação (1), podemos obter resultados particulares para diferentes domínios. Esses resultados nos dão condições de avaliar quando há condição de sucesso na colonização e quando há insucesso, ou seja, quando a função densidade de população cresce ou decresce com o passar do tempo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como continuação desse trabalho, procuraremos soluções numéricas da equação (1) a fim de compararmos com os resultados analíticos.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; RICHARD, C. D. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 6ª ed. 1997.

BROWN, D., ROTHERY, P. Models in biology: mathematics, statistics and computing. Chichester: John Wiley e Sons. 687p. 1993.

CRANK, J. The mathematics of diffusion. 2nd edition. Oxford University Press. Oxford, 1975.

SIMPSON J.M., Exact Solutions of Linear Reaction-Diffusion Processes on a Uniformly Growing Domain: Criteria for Successful Colonization. University of Leeds, United Kingdom, 2015.