

APLICAÇÕES BIRRACIONAIS E RESOLUÇÃO DE SINGULARIDADES DE UMA CURVA

SOUZA, Bruno
BALTAZAR, Rene
brunogarcia.souza1@gmail.com

Mostra de Produção Universitária
Área do conhecimento: Matemática

Palavras-chave: Singularidades, Aplicações Birracionais, Software SURFER.

1 INTRODUÇÃO

Usando Geometria Algébrica, sabemos que em uma curva definida por um polinômio há muitos pontos dessa curva que seguem um padrão de uma certa suavidade; porém, existem exceções a esse padrão em uma quantidade finita de pontos dessa curva. Mais precisamente, note que o seguinte ponto ressaltado na curva é diferente dos demais:

Pontos desse estilo são chamados de singularidades da curva; por definição, são onde todas as derivadas parciais ambas são nulas.

Um fato extremamente surpreendente é que curvas singulares podem ser transformadas de uma maneira equivalente em outros objetos que são não singulares através de aplicações birracionais, que são aplicações que apenas não estão definidas em um número finito de pontos. Isso, esclarece, no caso de curvas, o seguinte resultado conhecido por Teorema da Resolução de Singularidades de uma Curva:

Teorema: Seja X uma variedade. Então existe uma variedade não-singular Y e uma aplicação birracional $\pi: X \rightarrow Y$.

Esse resultado, no caso de curva, é demonstrado de maneira construtiva e oferece um mecanismo para determinar a variedade Y . Chama-se isso de *explosão da singularidade*. Assim, queremos tomar alguns exemplos de curvas singulares e aplicar essa construção: obtendo assim algo que tem propriedades muito parecidas com a curva original.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Inicialmente, precisa-se estudar a quantidade de pontos singulares de uma curva. O fato que uma curva algébrica sempre possui finitos pontos singulares será necessário. Assim, vamos trabalhar na compreensão do seguinte bem conhecido Lema.

Lema: A explosão do ponto singular é uma variedade lisa.

Com esses dois últimos resultados vamos provar o famoso Teorema da Resolução de Singularidades de uma Curva e obter uma visualização da explosão do ponto singular com o software SURFER

3 MATERIAIS E MÉTODOS (ou PROCEDIMENTO METODOLÓGICO)

S. Lamy (2002) demonstrou o famoso teorema de Jung sobre a decomposição de automorfismos em duas variáveis complexas de uma maneira geométrica. Para isso, transformou em um problema no plano projetivo e assim, explodindo os pontos singulares, pode resolver o problema e voltar para os complexos.

SOFTWARE SURFER /IMAGINARY (<http://imaginary.org/>):

Uma organização alemã formada por pesquisadores em Matemática com o objetivo de divulgação e elaboração de trabalhos científicos. O objetivo é trabalhar a ideia de se conectar equações algébricas com seu aspecto visual, resultando, por exemplo, em uma motivação para explorar a conexão entre "fórmulas e imagens". Para isso, o programa livre disponibilizado pelo grupo IMAGYNARY.

O software SURFER será útil para entender a representação dessa explosão do ponto singular da seguinte maneira:

1. Observamos que esse software faz representações de objetos algébricos em três dimensões; ou seja, (x,y,z) .
2. Observamos que a reta projetiva é formada por pares $[u:v]$ com as propriedades que $[u:v]=\alpha[u:v]$, onde α é uma constante.
3. No caso $u \neq 0$, note que $[u:v]=[1:v/u]$. Chamando $z = v/u$, podemos ter uma representação, a menos de $u=0$, no software da explosão do ponto singular.
4. No caso $v \neq 0$, note que $[u:v]=[u/v:1]$. Chamando $z = u/v$, podemos ter uma representação, a menos de $v=0$, no software da explosão do ponto singular.

4 RESULTADOS e DISCUSSÃO

Uma motivação é o estudo de objetos (nosso caso são curvas) que são birracionalmente equivalentes; ou seja, existe uma aplicação birracional de um para o outro (para exemplos: ver R. Hartshorne ou S. Iitaka).

A técnica de transformar um problema em outro análogo aparece em inúmeras aplicações. Mais precisamente, quando não se sabe resolver algo e, passando para um outro ambiente, algumas vezes encontra-se solução. No nosso caso, obtemos geometricamente uma visualização da variedade lisa resultante da explosão da singularidade e apresentamos exemplos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É possível observar, até o momento, que a aplicação do método de resolução das singularidades, com o software SURFER, facilita muito o entendimento das singularidades, pois mostra uma forma geométrica de como aquela singularidade se comporta.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, (1977).
- [2] S. Iitaka, *Algebraic geometry, an introduction to birational geometry of algebraic varieties*, Springer (1982).
- [3] S. Lamy, *Une preuve géométrique du théorème de Jung*, Enseign. Math. 48, no. 3-4, 291–315, (2002)
- [4] I. Vainsencher, *Curvas Algébricas Planas*, SBM, (1990).

**14ª Mostra da
Produção Universitária**

de 26 a 29 de outubro

