14ª Mostra da Produção Universitária
de 26 a 29 de outubro

Compreendendo a teoria das Álgebras de Hopf

AFONSO, Félix Afonso de
FREITAS, Daiane Silva de
PROLO FILHO, João Fransisco

felix2afonso@gmail.com

Evento: 14º Mostra de Produção Universitária - FURG
Área do conhecimento: Matemática Pura

Palavras-chave: Álgebras de Hopf, Espaço Dual, KG, K[X].

1 INTRODUÇÃO

Com objetivo de complementar os estudos em álgebra moderna durante a formação, iniciamos um trabalho de leitura e compreensão das Álgebras de Hopf. Este trabalho traz uma síntese do que é uma Álgebra de Hopf e alguns exemplos dessas álgebras como a álgebra de grupos KG e a álgebra de polinômios K[X]. Além disso fazemos uma análise e demonstramos alguns teoremas, muitas vezes somente enunciados, referentes a essa temática.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O primeiro exemplo de uma estrutura de Álgebra de Hopf foi observado em topologia algébrica por H. Hopf em 1941. Entretanto, apenas na década de sessenta álgebras de Hopf tornaram-se objetos de estudo sob um ponto de vista estritamente algébrico, conforme DASCALESCU. No final dos anos oitenta, pesquisas neste campo foram impulsionadas por suas conexões com a mecânica quântica.

Atualmente, existem muitas pesquisas acerca desse tema, devido a sua aplicação em diversos ramos da Matemática como, por exemplo, teoria de números, geometria algébrica, teoria de Lie, teoria de Galois, extensões de corpos separáveis, teoria de anéis graduados, teoria de operadores, teoria de grupos localmente compactos, teoria de distribuição, teoria da representação, mecânica quântica, entre outros.

3 MATERIAIS E MÉTODOS (ou PROCEDIMENTO METODOLÓGICO)

Durante o desenvolvimento deste trabalho buscamos ler, compreender e interpretar as definições e os teoremas propostos na bibliografia sobre este tema. Além disso também buscamos exemplos para melhor ilustrar alguns teoremas mais importantes referente ao caminho que desenvolvemos até compreender como as Álgebras de Hopf são trabalhadas.

4 RESULTADOS e DISCUSSÃO

Mostramos neste trabalho que as álgebras KG (álgebra de grupo) e K[X] (álgebra dos polinômios em uma indeterminada X) têm uma estrutura de coálgebra. Além disso, quando consideramos a estrutura de álgebra de KG, mostramos que o Espaço Dual de KG, denotado por KG*, tem uma estrutura de coálgebra, mediante certas hipóteses, e quando KG é tratado como coálgebra, mostramos que seu Dual tem uma estrutura de álgebra. O mesmo não acontece com K[X] devido a K[X] não possuir dimensão finita quando analisamos sua estrutura de álgebra , como K[X] não possui dimensão finita, seu Dual, K[X]*, não é uma coálgebra. Além dessas estruturas, KG e K[X] podem ser munidos da estrutura de biálgebra, ou seja, estruturas de álgebra e de coálgebra são compatáveis. Vemos ainda que, existe uma aplicação K-linear, que é denominada antípoda e denotada por S, a qual é a inversa da função identidade em relação ao produto convolução, esta aplicação é um anti-homomorfismo de álgebras. Portanto, tanto KG quanto K[X], munidos dessa antípoda S suportam uma estrutura de Álgebra de Hopf. Assim como é de se esperar, se KG é uma Álgebra de Hopf seu Dual, KG*, também é uma Álgebra de Hopf. Porém quando analisamos o Dual de K[X], K[X]*, em relação a estrutura de álgebra de Hopf, não podemos afirmar que ele mantem a estrutura pois devido a não finitude da base não é possível obtermos estruturas compatíveis quando consideramos o seu Dual.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi importante pois, além de aprofundar os estudos em álgebra no curso de matemática licenciatura, permitiram ver como algumas estruturas interagem com a estrutura das Álgebras de Hopf. Também foi possível ver como a estrutura funciona em alguns exemplos da própria álgebra como o KG e o K[X].

Para dar continuidade a este trabalho continuaremos o nosso estudo e compreensão da estrutura das Álgebras de Hopf para melhor compreender como ela se relaciona com outras estruturas já conhecidas.

REFERÊNCIAS

DASCALESCU, S. NASTASESCU, C. RAIANU, S. Hopf Alegbra an introduction. New York – Basel. Marcel Dekker, INC. 2001

HUNGERFORD, T. W. Algebra. New York. Springer. 2000.

KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with applications. John Wiley & Sons INC. London. 1978.

LIMA, E. Álgebra Linear. 8º ed. Rio de Janeiro. IMPA. 2011.